



**Zadania na XVIII Podkarpacki Konkurs Matematyczny
im. Franciszka Lejki
Poziom II**

(klasy drugie liceum i trzecie technikum)

Etap rejonowy

24 marca 2018 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że jeśli n jest liczbą całkowitą podzielną przez 3, to $\frac{n^3}{162} - \frac{n}{18}$ jest również liczbą całkowitą.
2. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z prawdziwa jest nierówność: $\frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} \leq \frac{x+y+z}{2}$.
3. Wyznacz najmniejszą wartość ułamka: $\frac{k^4+2k^2+3}{k^4+4k^2+4}$, gdzie $k \in R$.
4. Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: $|AB| = 21$, $|BC| = 15$ i $|AC| = 12\sqrt{2}$. Na boku BC obrano punkt D taki, że $|BD|:|DC| = 2:1$. Z punktu D poprowadzono proste prostopadłe do boków AB i AC , które przecięły te boki odpowiednio w punktach E i F . Wykaż, że na czworokącie $AEDF$ można opisać okrąg i oblicz iloczyn promieni okręgów opisanego na czworokącie $AEDF$ i wpisanego w trójkąt EBD .
5. W trójkącie ABC o danym polu S na bokach BC, CA, AB obrano odpowiednio punkty D, E, F w taki sposób, że $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AF|}{|FB|} = 3$. Oblicz stosunek pól trójkąta DEF do trójkąta ABC .

Powodzenia!